2017 自治医科大　略解答　（更新 H29.4.13）

1　直接割り算をしないで，剰余の定理を使う。
A に $x=-2a$ を代入すると，$A=-8a^3+4a^3+4a^3=0$
だから，A を B で割ったときの余りは 0　　(答) 0

2　まず $x+y=2\sqrt{3}$，$xy=1$ を求めておく。

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=12-3=9$$　　(答) 9

3　$\log_3 x=t$ とおくと，$2+t-\dfrac{12}{t}=3$

$t^2-t-12=0$
これを解いて 2 個の t に対応する x を求めてもよいが，それらを x_1，x_2 とすると，
解と係数の関係により次のように答えが出せる。
$\log_3 x_1+\log_3 x_2=1 \Leftrightarrow \log_3 x_1x_2=1 \Leftrightarrow x_1x_2=3$　(答) 3

4　前問と似ているが，こちらは 3 次方程式の解と係数の関係を使う。
$\log_2 x=t$ とおくと，$2t^3+3t^2-\alpha=0$　…★
$\log_2\beta=b$，$\log_2\gamma=c$ とおくと，★の解が b，$b+c$，$b-c$ となる。
解と係数の関係から，

$$3b=-\frac{3}{2},\ b\cdot 2b+(b+c)(b-c)=0,\ b(b+c)(b-c)=\frac{\alpha}{2}$$

前 2 式から $b=-\dfrac{1}{2}$，$(b+c)(b-c)=-2b^2$ が得られ，

$2\alpha=4b\times(b+c)(b-c)=-8b^3=1$　　(答) 1

5　あてはまる答が無く問題の不備です。試験中に何か指示があったのでしょうか。

θ の範囲を $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とすれば，(答) 2

6　極形式に表すと面倒だ。偏角だけわかればいいので，次のように解く。

Z の偏角は，$\dfrac{\pi}{4}\times 3+\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\times 2-\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\times 2=\dfrac{13}{12}\pi$ だから，

Z^{2n} の偏角は，$\dfrac{13}{12}\pi\times 2n=\dfrac{13\pi}{6}n$

Z^{2n} が実数⇔偏角が π の整数倍⇔n が 6 の倍数　　(答) 6

7　$\alpha^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

Aの次数を下げることを考え，2つずつ組み合わせるとαが消える。

$$\frac{1}{1-\alpha^6}=\frac{\alpha}{\alpha-\alpha^7}=-\frac{\alpha}{1-\alpha},\quad \frac{1}{1-\alpha^5}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\alpha^7}=-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2},\quad \frac{1}{1-\alpha^4}=\frac{\alpha^3}{\alpha^3-\alpha^7}=-\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}$$

$$A=\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)+\left(\frac{1}{1-\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)+\left(\frac{1}{1-\alpha^3}-\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}\right)=3$$　(答) 3

8　$a,\ b,\ c$をいちいち求めないで処理したい。共通解をtとすると，

Aの解はt，$1+i$，$1-i$，Bの解はt，sと表せる。解と係数の関係より，

$t+2=-a$　…①　　$t+s=b$　…④

$2t+2=b$　…②　　$ts=3$　…⑤

$2t=-c$　…③

①～③を掛けて，　$abc=4t(t+1)(t+2)$　…★

②，④より，sをtで表すと，$s=t+2$

⑤より，　$t(t+2)=3 \Leftrightarrow (t+1)^2=4$　…★★

★，★★により，$\left|\dfrac{abc}{4}\right|=3\times 2=6$　(答) 6

9　前問８と同様，解と係数の関係を使う。８よりも易しい。

もう１つの解をcとすると，３つの解の積から，$2c=8$　$c=4$

$a=-(1+2+4)=-7$

$b=1\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot 4=14$　(答) 2

１０　普通に解いてもよいが，時間短縮の為，次のように解く。

円Ｃは，$(x+2)^2+(y-1)^2=4$ だから，半径が２である。

円Ｃと点Ｐの軌跡は，点Ａを中心として相似の位置にあり，相似比は２：１となる。

だから，S＝(半径１の円の面積)＝π　(答) 7

１１　手間がかかる問題。一旦後回しにするのがいい。

$x-y+2=0$

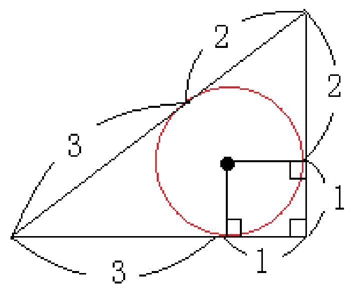
$x+y-12=0$

$7x-y-4=0$

２直線の交点を求めると，A(5，7)，B(2，10)，C(1，3)

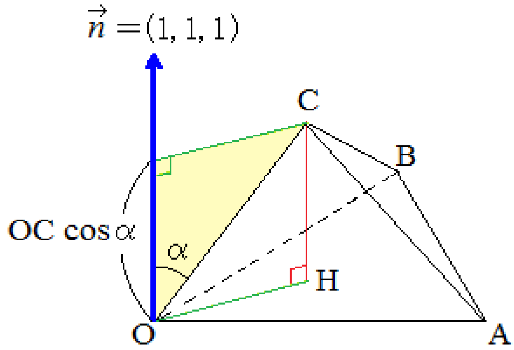
３辺の長さは，$AB=3\sqrt{2}$，$BC=5\sqrt{2}$，$CA=4\sqrt{2}$

３：４：５の直角三角形の内接円は右図のようになる。



相似比$\sqrt{2}$を加味して，$S=2\pi$　(答) 8

１２　現在の指導要領の中で解くのはキツい。これもパスするのがよい。
四面体の底面を OAB とし，△OAB の面積と，
C から面 OAB に引いた垂線の長さを求める。
簡略の為，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を A，B，C の位置ベクトル
とする。



$|\boldsymbol{a}|^2=14$，$|\boldsymbol{b}|^2=6$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-9$ だから，

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{14\times6-81}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

右の図のように，面 OAB に垂直なベクトル

$\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$を発見すると，

$$\vec{n}\cdot\boldsymbol{c}=\sqrt{3}\times\mathrm{OC}\cos\alpha=\sqrt{3}\,\mathrm{CH}$$

だから，$\mathrm{CH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$　　(答) 3

１３　普通に解いてもよいが，時間短縮の為，次のように解く。（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ はベクトル）

$$k^2=|\boldsymbol{a}-2\sqrt{2}\,\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2)-|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2$$

$=10-4=6$　　(答) 6

１４　ブログ記事を参照ください。(答) 2

１５　$360=2^3\times3^2\times5$
a または b は 1，2^3，3^2，5 をとり得る。（同じ素因数が a または b に偏る）
組$(a,\ b)$ の個数はその 2 倍。　(答) 8

１６　数列$\{p_n\}$の漸化式をつくる。確率 p_{n+1} は，
(ア) n 回投げたあと点 P が A にあり，次の試行で 1～4 が出る
(イ) n 回投げたあと点 P が A 以外にあり，次の試行で A に行く目が出る
この 2 つの場合があるので，

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{2}{3}+(1-p_n)\times\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{6}$$

p_n の極限値を α とすると，$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{6}$　　$\alpha=\dfrac{1}{3}$　(答) 2

この解法は厳密にはまずいのだが，記述式でないのでこれでいい。

１７　分母・分子を x で割れば公式が使える。これに気づけなければロピタルを使う。

$$\frac{3\sin 4x}{x+\sin x}=\frac{3\cdot\dfrac{\sin 4x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}\to\frac{3\times 4}{1+1}=6\qquad(答)\ 6$$

１８　$f(x)=2^x$ とおくと，

$$\frac{2^x-1}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x}\to f'(0)$$

$f'(x)=2^x\log 2$ だから，$k=f'(0)=\log 2$

$0<\log 2$，$2.7<e$ という条件を使って不等式を導く。

$$2.7^0<2.7^{\log 2}<e^{\log 2}$$

すなわち，$1<2.7^k<2$　(答) 1

１９　$f(x)=3x^4+4x^3-102x^2+180x+10$ とおく。

$f'(x)=12x^3+12x^2-204x+180$

$\qquad=12(x+5)(x-1)(x-3)$

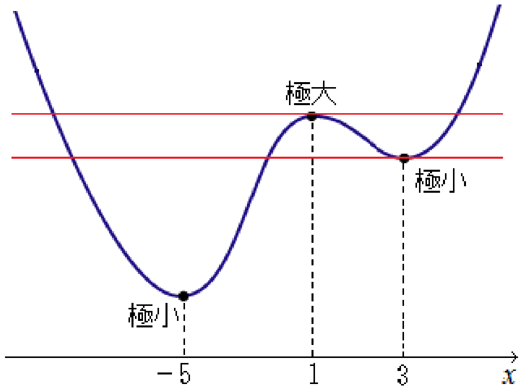
$x=1$ で極大，$x=-5$，3 で極小。

極小値は，$x=1$ から遠い $x=-5$ の方が値が小さい。←$f(-5)$の計算をサボる

C と直線 l が 4 点で交わるような k の範囲は，

$\quad f(3)<<f(1)$

$a=f(3)=-17$，$b=f(1)=95$　　(答) 3



２０　$$\int_0^1\left(a_{n-1}x^{n+1}-a_n x^n\right)dx=\left[\frac{a_{n-1}}{n+2}x^{n+2}-\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{a_{n-1}}{n+2}-\frac{a_n}{n+1}=0$$

よって，$(n+2)a_n=(n+1)a_{n-1}$

数列$\{(n+2)a_n\}$は初項 $3a_1=3$ の定数列だから，$(n+2)a_n=3$

$$2n\,a_n=2n\cdot\frac{3}{n+2}=\frac{6}{1+\dfrac{2}{n}}\to 6\quad(答)\ 6$$

２１　微分して増減表を作るのが普通だが，次の解法の方が早い。

$y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ とおいて分母を払うと，$yx^2-x+(y+1)=0$ …★

$y=0$ のとき，$x=1$

$y\neq 0$ のとき，★が実数解をもつ条件は，$D=1-4y(y+1)\geqq 0$

すなわち，$4y^2+4y-1\leqq 0$　(この解に $y=0$ は含まれる)

よって，M，m は $4y^2+4y-1=0$ の解であり，解と係数の関係から，

$$|4Mm|=\left|4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\right|=1\qquad(答)\ 1$$

２２　2曲線が t で接する条件は，$f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$

普通はこれを使うのだが，手間がかかるので次のように工夫する。

C1 と C2 が接する

$\Leftrightarrow$ $x^3-x^2-12x-1=-x^3+2x^2+a$，すなわち $2x^3-3x^2-12x-1=a$ が重解をもつ

$\Leftrightarrow$ $y=2x^3-3x^2-12x-1$ と $y=a$ が接する

$\Leftrightarrow$ $y=2x^3-3x^2-12x-1$ の極値が a である…★

★の条件を求める。

$$y'=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

極値は，$x=-1$ のとき $y=6$（$=a$）

$x=2$ のとき $y=-21$（不適）　　(答) 3

２３　2曲線の交点を（α，β）とすると，

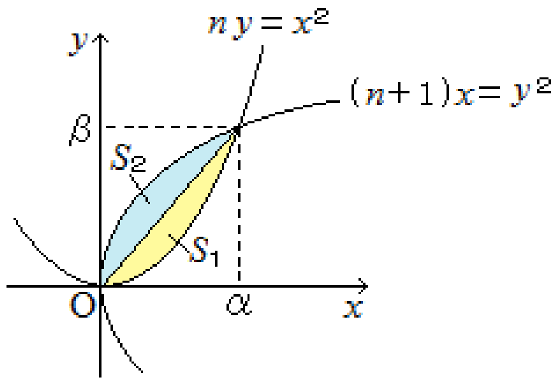
$(n+1)\alpha=\beta^2$　……①

$n\beta=\alpha^2$　……②

①，②の辺々を掛けて，

$n(n+1)\alpha\beta=\alpha^2\beta^2$

$\alpha\beta=n(n+1)$



右図で，$S_1=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\alpha^3}{6}=\dfrac{\alpha^2}{6n}\cdot\alpha=\dfrac{\alpha\beta}{6}$

$$S_2=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\beta^3}{6}=\frac{\beta^2}{6(n+1)}\cdot\beta=\frac{\alpha\beta}{6}$$

だから，$S_n=\dfrac{\alpha\beta}{3}=\dfrac{n(n+1)}{3}$

$$\frac{27S_n}{n^2}=9\left(1+\frac{1}{n}\right)=9$$　(答) 9

２４　ブログ記事を参照ください。(答) 3

２５　$x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ とおくと，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\sin\theta)^2+(1-\cos\theta)^2=2(1-\cos\theta)=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8$$　(答) 8

(注)サイクロイド

$x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$

では，

1.　面積…3π
2.　回転体の体積…$5\pi^2$
3.　曲線の長さ…8

となる。覚えておくと何かと便利。