解答編

1 (1)　$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ のとき，x^4y+xy^4 の値を求めよ。

(2)　$x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき，$x^4+\dfrac{1}{x^4}$ の値を求めよ。

(3)　$x+y+z=3$，$xy+yz+zx=4$，$xyz=2$ のとき，
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ の値を求めよ。

解答

(1)　$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

よって，

$$\begin{aligned} x^4y+xy^4&=xy(x^3+y^3)\\ &=xy\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}\\ &=1\cdot(4^3-3\cdot1\cdot4)\\ &=52 \end{aligned}$$

【対称式の値の考え方】
x と y の対称式では，式を
$x+y$ と xy だけで表せる。
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}$　←$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ と同じ式変形。

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=3^2-2=7$$

$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$　←$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ と同じ式変形。

$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$$

$$=7^2-2=47$$

(3)　$A^2+B^2+C^2=(A+B+C)^2-2(AB+BC+CA)$ より，←この等式も暗記。

$$\begin{aligned} x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2&=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\\ &=(xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)\\ &=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\\ &=4^2-2\cdot2\cdot3\\ &=4 \end{aligned}$$

x，y，z の対称式は，
$x+y+z$，$xy+yz+zx$，xyz
だけの式で表すことができる。

2　次の$\boxed{}$に，必要，十分，必要十分のうち適するものを入れよ。

(1)　$x^2<3x$ であることは，$|x-1|<3$ であるための$\boxed{}$条件である。

(2)　整数 a，b において，ab が偶数であることは，a^2+b^2 が奇数であるための$\boxed{}$条件である。

解答

(1)　p：　$x^2<3x$

q：　$|x-1|<3$　とする。←$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ の真偽を調べます。

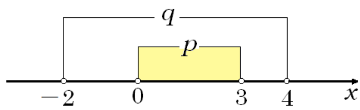
$p \Leftrightarrow x(x-3)<0$

$\Leftrightarrow 0<x<3$

$q \Leftrightarrow -3<x-1<3$ ←

$\Leftrightarrow -2<x<4$

$|X|<c$
$\Leftrightarrow -c<X<c$



$p \Rightarrow q$ は真，$q \Rightarrow p$ は偽であるので，←p が q の中にあれば，$p \Rightarrow q$ が真。

p は q であるための十分条件である。

（答）十分

【必要・十分条件の判定】
$p \Rightarrow q$ が真，$q \Rightarrow p$ が偽のとき，「**十分**」
$p \Rightarrow q$ が偽，$q \Rightarrow p$ が真のとき，「**必要**」

(2)　p：　ab が偶数である

q：　a^2+b^2 が奇数である　←同様に，$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ の真偽を調べます。

［$p \Rightarrow q$］$a=0$，$b=0$ のときが反例となるので，偽。

［$q \Rightarrow p$］$q \Rightarrow p$ の対偶 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ は，「ab が奇数$\Rightarrow a^2+b^2$ は偶数」となる。

ab が奇数のときは a も b も奇数だから，

$a=2m+1$，$b=2n+1$（m，n は整数）とおくと，←文字で置き換える。

$$a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2$$
$$=4m^2+4m+1+4n^2+4n+1$$
$$=2(2m^2+2m+2n^2+2n+1)$$

真偽の判断が難しいときは，
対偶の真偽を調べよう。

だから，a^2+b^2 は偶数である。

対偶 $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ が真だから，$q \Rightarrow p$ も真である。

よって，p は q であるための必要条件である。　（答）必要

【参考】

ab が偶数 $\Leftrightarrow$ a が偶数　または　b が偶数
ab が奇数 $\Leftrightarrow$ a が奇数　かつ　b が奇数

このように，セットで
覚えておくと役に立つ。

$a+b$ が偶数 $\Leftrightarrow$ a と b の偶奇が一致 ←どちらも偶数またはどちらも奇数
$a+b$ が奇数 $\Leftrightarrow$ a と b の偶奇が異なる

3　a を定数として，$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $y = x^2 - ax + 3a$ の最小値を M とする。

(1)　M を a の式で表せ。

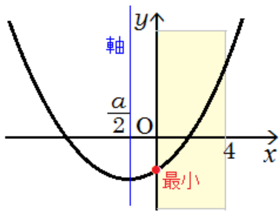
(2)　$M = 5$ となるときの a の値を求めよ。

解答

(1)　$y = x^2 - ax + 3a$

$= \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + 3a$　←まずは平方完成。

(ア)　$\dfrac{a}{2} < 0$，すなわち $a < 0$ のとき，



$x = 0$ のとき最小となる。

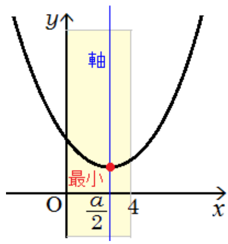
$M = 3a$

(イ)　$0 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 4$，すなわち $0 \leqq a \leqq 8$ のとき，

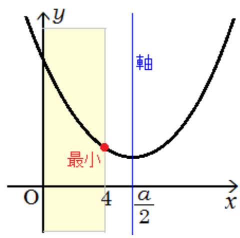
$x = \dfrac{a}{2}$ のとき最小となる。

$M = -\dfrac{a^2}{4} + 3a$

(ア)軸が定義域より左
(イ)軸が定義域の中
(ウ)軸が定義域より右
3つに場合分けをする。



(ウ)　$4 < \dfrac{a}{2}$，すなわち $8 < a$ のとき，



$x = 4$ のとき最小となる。

$M = 16 - 4a + 3a$

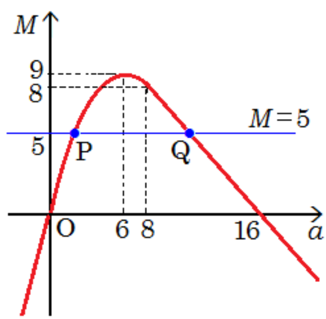
$= -a + 16$

(答) $a < 0$ のとき，$M = 3a$

$0 \leqq a \leqq 8$ のとき，$M = -a^2/4 + 3a$

$8 < a$ のとき，$M = -a + 16$

このグラフをかいておくと(2)が解きやすい。⇒⇒



(2)　$M = 5$ となるときの a は，右図の2点 P，Q の x 座標である。

$-\dfrac{a^2}{4} + 3a = 5\ (a < 6)$ を解いて，$a = 2$

$-a + 16 = 5$ より，$a = 11$

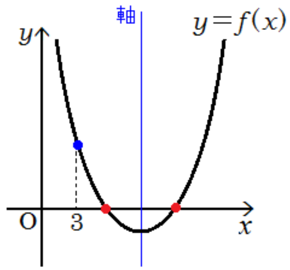
(答) $a = 2,\ 11$

4　2次方程式 $x^2-ax+2a=0$ が異なる2つの実数解をもち，それらがともに3より大きくなるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答

$f(x)=x^2-ax+2a$ とおき，$f(x)=0$ の判別式を D とする。

$f(x)=0$ が3より大きな異なる2つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが右の図のようになるときで，これは



（ⅰ）判別式 $D>0$

（ⅱ）軸が $x>3$ にある

（ⅲ）$f(3)>0$

3より大きな解をもつ
⇔グラフが x 軸と
$x>3$ の部分で交わる

のすべてを満たすことである。

（ⅰ）について，$D=a^2-8a>0$

$a<0,\ 8<a$ ……①

（ⅱ）について，

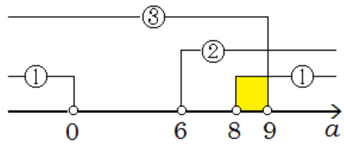
$f'(x)=2x-a=0$ より，$x=\dfrac{a}{2}$ ←微分すると軸がわかります。

だから，$\dfrac{a}{2}>3$　　$a>6$ ……②

（ⅲ）について，

$f(3)=9-a>0$ より，$a<9$ ……③

①～③の共通範囲を求める。



(答)　$8<a<9$

【参考】

次のように放物線と直線の共有点に着目して解くことも可能だ。

$x^2-ax+2a=0 \iff x^2=a(x-2)$

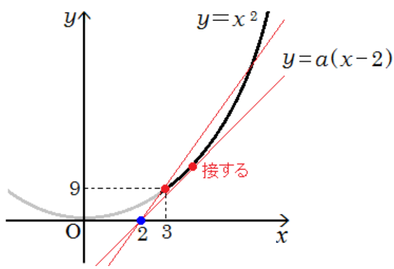
と変形すると，求める条件は，2つのグラフ $y=x^2$，$y=a(x-2)$ が，$x>3$ の範囲で異なる2点で交わることと同じである。

第一象限で接するとき，$a=8$

点$(3,\ 9)$で交わるとき，$a=9$

a がこの間の値をとるとき条件をみたす。

(答) $8<a<9$

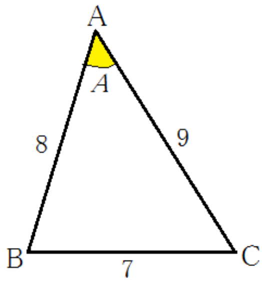


5　△ABC において，AB＝8，BC＝7，CA＝9 とする。
このとき，$\sin A$＝[ア]である。また，外接円の半径は[イ]であり，
内接円の半径は[ウ]である。

解答

余弦定理より，←３辺がわかるなら余弦定理

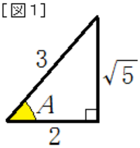
$$\cos A=\frac{8^2+9^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{96}{2\cdot 8\cdot 9}=\frac{2}{3}$$



$\sin A$ を求めるため，$\cos A=\dfrac{2}{3}$ となる

A を内角にもつ直角三角形をかく。

[図１]



右の図１のようになるので，

sin²A＋cos²A＝1 を
を使うよりも早いです。

$$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，
正弦定理より，

$$\frac{7}{\sin A}=2R$$

$$R=\frac{7}{2}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{7}{2}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$$

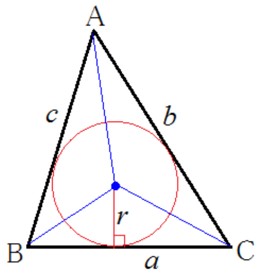
【正弦定理・余弦定理の使い方】

3辺	2辺と1角	1辺と2角	外接円の半径

余弦定理　　　正弦定理

次に，△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$ …★　←公式なので覚えよう。



である。面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8\sin A=36\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=12\sqrt{5}$$

よって，

$$12\sqrt{5}=\frac{1}{2}r(8+7+9)$$ ←★に代入。

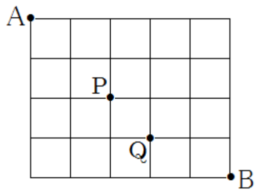
$$12\sqrt{5}=12r$$

$$r=\sqrt{5}$$

(答) ア…$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，イ…$\dfrac{21\sqrt{5}}{10}$，ウ…$\sqrt{5}$

6 (1) $x+y+z=10$ を満たす正の整数 x, y, z の組(x, y, z)は，全部で何組あるか。

(2) 図のような道がある。A から B まで最短の道を行くとき，途中で P を通る道順は[ア]通りあり，P または Q を通る道順は[イ]通りある。



解答

(1) $x+y+z=10$ を満たす組を，次のように考える。

10 個の○を 1 列に並べ，○と○の間の 9 か所のいずれか 2 か所に | を入れるとする。←特殊な考え方をします。

分けられた○の個数を左から順に x, y, z とすれば，これが方程式の解の 1 つとなる。←解の 1 つが仕切りの入れ方に対応する。

○○○|○○○○○|○○

x　　　y　　　z

解　$x=3$, $y=5$, $z=2$

このような 2 か所の | を入れる方法は，

$$_{9}C_{2}=\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36\text{ (通り)}$$

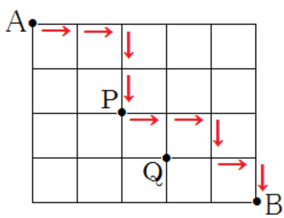
(答) 36 組

【問】$x+y+z=10$ を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組は？

【解】○9 個と | 2 個の計 11 個を 1 列に並べる順列となり，$11!/9!\,2!={}_{11}C_{2}$ (組)

(2) (P を通る道順)$={}_{4}C_{2}\times{}_{5}C_{2}$

$$=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=60\text{ (通り)}$$



(Q を通る道順)$={}_{6}C_{3}\times{}_{3}C_{1}$

$$=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\times 3=60\text{ (通り)}$$

(P と Q を通る道順)$={}_{4}C_{2}\times 2\times{}_{3}C_{1}$

$$=36\text{ (通り)}$$

縦・横に何回か進むとき，どこで縦に進むかの選び方が，組合せ $_{n}C_{r}$ 通りだけある。

よって，P または Q を通る道順は，

(P を通る道順)＋(Q を通る道順)－(P と Q を通る道順) ←和集合の考え。

$=60+60-36$

$=84$ (通り)

(答) ア…60，イ…84

7 (1)　1 から 8 までの整数が 1 つずつ書かれた 8 枚のカードの中から 3 枚をひいて 1 列に並べ，3 桁の整数をつくる。
この整数が 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　店に立ち寄るたびに 20%の確率で傘を忘れる人が，A，B，C 3 つの店に順に立ち寄ったあと，どこかの店に傘を忘れたことに気付いた。
2 番目の B で傘を忘れた確率を求めよ。

解答

(1)　できた整数が 3 の倍数になるのは，
各位の数の和が 3 の倍数になるときである。←この性質を利用するとラクです。
そこで，1 から 8 までの整数を，右のように 3 で割った余りで A～C の 3 組に分ける。

A … 1，4，7
B … 2，5，8
C … 3，6

例えば，1＋5＋6
　≡1＋2＋0＝3 (mod3)
だから，3 の倍数になる。

3 つの数の和が 3 の倍数になるのは，
・A の 3 つの数を選ぶ場合
・B の 3 つの数を選ぶ場合
・A，B，C のそれぞれから 1 つ選ぶ場合
があり，選び方の総数は，

$$2+3\times3\times2=20\ (\text{通り})$$

求める確率は，←順列でなく組合せで立式してＯＫ

$$\frac{20}{{}_8C_3}=20\times\frac{3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}=\frac{5}{14}$$

(答) $\frac{5}{14}$

(2)　「A，B，C のどこかに傘を忘れる」という事象を X,
「B で傘を忘れる」という事象を Y
とすると，求める確率は，条件付き確率 $P_X(Y)$ である。
余事象 $\overline{X}$ は，A，B，C のどこにも傘を忘れないという事象だから，

$$P(X)=1-P\left(\overline{X}\right)$$ ←1－(A，B，C で忘れない確率)

$$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{61}{125}$$

また，$P(X\cap Y)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$　←A で忘れない，かつ B で忘れる確率

$$P_X(Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{4}{25}\times\frac{125}{61}=\frac{20}{61}$$

(答) $\frac{20}{61}$

↑条件付き確率はこの公式を使おう。

8 (1)　2^{100} を 17 で割ったときの余りを求めよ。
(2)　$29x+13y=1$ の整数解を求めよ。

解答

(1)　2^2, 2^3, 2^4, ……

この中から 17 と差が 1 であるものを探す。

$$2^4=16\equiv-1 \pmod{17}$$

であるから,

$$2^{100}=(2^4)^{25}$$ ←2^4 をひとまとめにします。

$$\equiv(-1)^{25}=-1\equiv16 \pmod{17}$$

(答)　16

【合同式】
$a\equiv b \pmod m$,
$c\equiv d \pmod m$ のとき,
[1] $a+c\equiv b+d \pmod m$
[2] $ac\equiv bd \pmod m$
[3] $a^n\equiv b^n \pmod m$

(2)　$29=13\times2+3$

$13=3\times4+1$　←ユークリッドの互除法の計算式を使います。

この等式を利用すると,

$$\begin{aligned}1&=13-3\times4\\&=13-(29-13\times2)\times4\\&=29\times(-4)+13\times9\end{aligned}$$

←この式変形は, やりにくい。

よって, $29\times(-4)+13\times9=1$ ←整数解の 1 つ $x=-4$, $y=9$ が得られた。

$$\begin{array}{rrrl} & 29x & +13y & =1\\ -) & 29\times(-4) & +13\times9 & =1\\ \hline & \multicolumn{3}{l}{29(x+4)+13(y-9)=0}\end{array}$$

$29(x+4)=-13(y-9)$　←両辺を積の形にするのがコツです。

29 と 13 は互いに素だから, k を整数として次のように表される。

$x+4=13k$, $y-9=-29k$

(答)　$x=13k-4$, $y=-29k+9$ (k は整数)

【参考】

(2)　[別解]　合同式を利用する。慣れるとこちらの方が早い。

方程式の両辺を 13 を法として考える。$29\equiv3$, $13\equiv0 \pmod{13}$ だから,

$29x+13y\equiv1 \pmod{13}$ ⇒ $3x\equiv1 \pmod{13}$　←これを満たす x を 1 つ見つける。

右辺の 1 に 13 を足すか引くかして 3 の倍数にする。←ここは勘でやる。

$$3x\equiv1 \Rightarrow 3x\equiv1-13 \Rightarrow 3x\equiv-12 \Rightarrow x\equiv-4$$

$x=-4$ のとき $y=9$ となり, これが整数解の 1 つとわかる。以下は同じ。

9 (1) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}$ のとき，$x^2+y^2+z^2=yz+2zx$ を証明せよ。 (2) $(x+2y)^2 \geqq 2(x-2)(y+1)$ を証明せよ。

解答

(1) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5}=k$ とおくと，

【比例式の考え方】
比例式では，**$=k$** とおく。

$x=3k$，$y=4k$，$z=5k$

$x^2+y^2+z^2=(3k)^2+(4k)^2+(5k)^2$ ←各辺を k の式で表すことができます。

$=50k^2$

$yz+2zx=4k\cdot5k+2\cdot5k\cdot3k$

$=50k^2$

よって，$x^2+y^2+z^2=yz+2zx$ (証明終わり)

(2) $(x+2y)^2-2(x-2)(y+1)$

【不等式の証明】
差を取って**平方完成**

$=x^2+4xy+4y^2-2(xy+x-2y-2)$

$=x^2+2xy+4y^2-2x+4y+4$

$=x^2+2(y-1)x+4y^2+4y+4$ ←x について整理します。

$=\{x+(y-1)\}^2-(y-1)^2+4y^2+4y+4$

$=(x+y-1)^2+3y^2+6y+3$

$=(x+y-1)^2+3(y+1)^2 \geqq 0$ ←平方完成できた。

よって，

$(x+2y)^2 \geqq 2(x-2)(y+1)$ (証明終わり)

等号が成り立つのは，$x+y-1=0$，$y+1=0$ のとき，すなわち，$x=2$，$y=-1$ のときである。←ここは書かなくても減点にならない。

【参考】

［シュワルツの不等式］ **$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$**

等号成立は，$a:b=x:y$ のとき。

(証明) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2axby+b^2y^2)$

$=a^2y^2-2axby+b^2x^2$

$=(ay-bx)^2\geqq0$ ←等号成立は $ay=bx$ のとき。

よって，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

いろいろと応用範囲が広いので，覚えておくと便利だ。(20⑥参照)

１０ (1)　$a>0$，$b>0$，$c>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

(2)　$x>0$ のとき，$\dfrac{x}{x^2+1}$ の最大値を求めよ。

解答

(1)　$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から，

$$\left.\begin{aligned} a+b &\geqq 2\sqrt{ab} \\ b+c &\geqq 2\sqrt{bc} \\ c+a &\geqq 2\sqrt{ca} \end{aligned}\right\} ★$$

【相加平均≧相乗平均】
$a>0$，$b>0$ のとき，
$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$
等号成立は $a=b$ のとき。

左辺どうし，右辺どうしを掛け合わせると，

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$　　(証明終わり)

等号が成り立つのは，★の不等式すべての等号が成立するときであり，

これは $a=b=c$ のときである。←等号成立の説明は，書かなくても減点にならない。

(2)　$\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$　←分母・分子を x で割るのがコツです。

$x>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から，

$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}}$　すなわち，$x+\dfrac{1}{x} \geqq 2$ ……★　←分母の範囲がわかった。

よって，$0 < \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}} \leqq \dfrac{1}{2}$ となるから，$0 < \dfrac{x}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{2}$　←上限が出来ましたね。

等号が成り立つのは，★の不等式で等号が成立するときであり，

これは $x=\dfrac{1}{x}$，すなわち $x^2=1$ より $x=1$ のときである。

等号が成り立つ場合があることを必ず言うこと。

(答)　$\dfrac{1}{2}$

【参考】

(2)　$\dfrac{x}{x^2+1} \leqq \dfrac{1}{2}$ という不等式は，左辺が $\dfrac{1}{2}$ 以下であると言っているだけで，

$\dfrac{1}{2}$ をとる保証はない。なので，必ず等号成立の条件を説明する必要がある。

１１　(1)　2 次方程式 $x^2-2x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の値を求めよ。
① $(2\alpha-1)(2\beta-1)$　　② $\alpha^3-3\alpha^2+8\alpha+2$
(2)　方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき，$\omega^{10}+\omega^{20}$ の値を求めよ。

解答

(1)①　解と係数の関係より，$\leftarrow ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \alpha+\beta=-\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a},\ \alpha\beta=\boldsymbol{c}/\boldsymbol{a}$

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=5$$

$$(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$$
$$=4\cdot5-2\cdot2+1=17$$

(答)　17

【解 α，β の式の値】
①**対称式の変形をせよ。**
②**2 次以上は次数下げをせよ。**

②　α は $x^2-2x+5=0$ の解だから，

$$\alpha=1\pm\sqrt{1-5}=1\pm2i$$ $\leftarrow$ **α はこの 2 通りがあります。**

また，$\alpha^2-2\alpha+5=0$ $\leftarrow$ **2 次方程式を作っておきます。**

$\alpha^3-3\alpha^2+8\alpha+2$ を $\alpha^2-2\alpha+5$ で割ると，右のようになるから，

$$\begin{array}{r|l}
 & \alpha\ -1 \\
\alpha^2-2\alpha+5 & \alpha^3-3\alpha^2+8\alpha+2 \\
 & \alpha^3-2\alpha^2+5\alpha \\ \hline
 & -\alpha^2+3\alpha+2 \\
 & -\alpha^2+2\alpha-5 \\ \hline
 & \alpha+7
\end{array}$$

↓↓ **$A=BQ+R$ の式**

$$\alpha^3-3\alpha^2+8\alpha+2=(\alpha^2-2\alpha+5)(\alpha-1)+\underline{\alpha+7}$$

↑ **この余りの部分が残ります。**

この式の右辺に α の値を代入する。

　　の部分が 0 だから，

$$\alpha^3-3\alpha^2+8\alpha+2=\underline{\alpha+7}$$
$$=8\pm2i$$

(答)　$8\pm2i$

値が 0 になるような式でわり算をすることで，次数が下げられる。

(2)　ω は $x^3=1$ の解だから，$\omega^3=1$

また，$x^3=1 \iff x^3-1=0$
$\iff (x-1)(x^2+x+1)=0$

ω は虚数だから，$\omega^2+\omega+1=0$

【オメガ根の性質】
[1]　$\omega^3=1$
[2]　$\omega^2+\omega+1=0$

$$\omega^{10}+\omega^{20}=(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^6\cdot\omega^2$$ $\leftarrow$ **ω^3 でまとめます。**

$$=1\cdot\omega+1\cdot\omega^2$$
$$=(\omega^2+\omega+1)-1$$ $\leftarrow$ **0 になる $\omega^2+\omega+1$ を作ります。**
$$=-1$$

(答)　-1

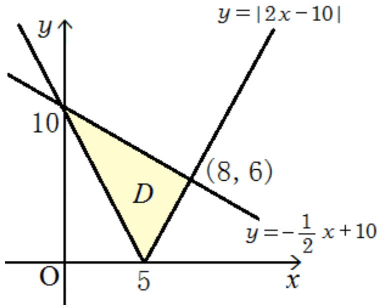
１２　x，y が 2 つの不等式 $y \leqq -\dfrac{1}{2}x+10$，$y \geqq |2x-10|$ を満たす。

(1)　$x+y$ の最大値を求めよ。

(2)　x^2+y^2 の最小値を求めよ。

解答

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x+10 \\ y \geqq |2x-10| \end{cases}$$ の表す領域を D とする。



$y \geqq |2x-10| \Leftrightarrow y=|2x-10|$ の上方

グラフは折れ線

2 直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+10$，$y=2x-10$ の

交点の座標を求めると，(8，6)となる。

(1)　$x+y=k$　……①

とおくと，①は $y=-x+k$ だから，

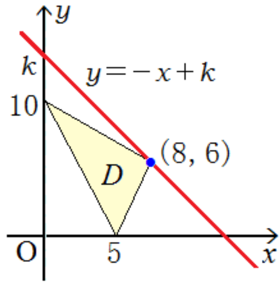
傾き－1，切片 k の直線を表す。

直線①が領域 D と共有点をもつとき，
切片 k の最大値が求めるもの。

直線①が点(8，6)を通るとき k は最大で，

最大値は，$k=8+6=14$

(答) 14



(2)　領域 D の点(x，y)を P とすると，

$$OP^2=x^2+y^2$$

である。←OP が最小のとき x^2+y^2 は最小

OP が最小となるのは，点 P が

直線 l：$y=-2x+10$ 上にあり，$OP \perp l$

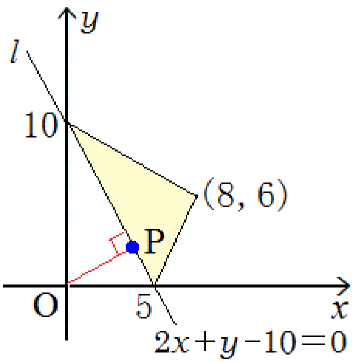
となるときである。←最短距離を考えます。

このとき OP は，

点 O と直線 $2x+y-10=0$ の距離だから，

$$OP=\frac{|-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

$$OP^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$$　(答) 20



最小値を与える x，y を求めるには，
直線 l と OP：$x-2y=0$ の連立方程式を解きます。

１３　$y=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x$　$(0\leqq x<2\pi)$とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおく。y を t の関数で表せ。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値と最小値を求めよ。

解答

(1)　$t^2=(\sin x+\cos x)^2$

$=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$　←２乗すると $\sin x\cos x$ が出てきます。

$=1+2\sin x\cos x$

よって，$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

$y=2\cdot\dfrac{t^2-1}{2}+t=t^2+t-1$

置き換えによって２次関数に帰着させるという考え方。
高校数学でよく出てきます。

(答)　$y=t^2+t-1$

(2)　$t=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　←「三角関数の合成」この形は丸暗記です。

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ より，$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　……★

(答)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

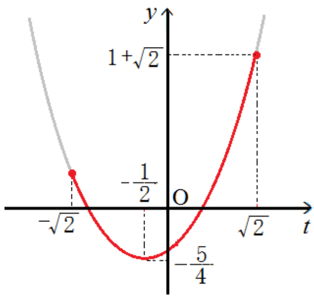
(3)　(1)より，$y=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

★の範囲で y は，

$t=\sqrt{2}$ のとき，最大値 $1+\sqrt{2}$

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $-\dfrac{5}{4}$

をとる。



(答) 最大値 $1+\sqrt{2}$，最小値 $-\dfrac{5}{4}$

【参考】

この問題の式 $2\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ のような $\sin x$ と $\cos x$ の対称式では，
$t=\sin x+\cos x$ とおくと t だけの式で表せる。この性質も覚えておこう。

１４　(1)　正の実数 x，y が $x^2y=16$ を満たすとき，$(\log_2 x)(\log_2 y)$ の最大値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

(2)　6^{20} は[ア]桁の整数である。また，その最高位の数は[イ]である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答

【対数関数の最大・最小】
[1]　対数の条件に直して考える。
[2]　真数だけを取り出して考える。

(1)　$x^2y=16$ の両辺の 2 を底とする対数をとると，$\log_2(x^2y)=\log_2 16$

$$2\log_2 x+\log_2 y=4$$

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと，←[1]のタイプです。

$$2X+Y=4$$

$$Y=4-2X \quad \cdots\cdots①$$ ←X，Y はすべての実数をとり得ます。

また，$(\log_2 x)(\log_2 y)=XY$ ←①の条件のもと，XY の最大値を求めればいい。

$$XY=X(4-2X)$$
$$=-2X^2+4X$$ ←2 変数の最大・最小では 1 文字消去⇒平方完成が基本。
$$=-2(X-1)^2+2$$

XY は，$X=1$ のとき最大値 2 をとる。このとき，①より $Y=2$ である。

$\log_2 x=1$，$\log_2 y=2$ より，$x=2$，$y=4$ ←x，y の値を求めます。

(答)　最大値 2，$x=2$，$y=4$

(2)　$X=6^{20}$ とすると，

【X の桁数の求め方】
$n-1\leqq\log_{10}X<n \Leftrightarrow 10^{n-1}\leqq X<10^n$
$\Leftrightarrow$ X は n 桁の数

【X の最高位の数の求め方】
$m+\log_{10}N\leqq\log_{10}X<m+\log_{10}(N+1)$
$\Leftrightarrow N\times10^m\leqq X<(N+1)\times10^m$
$\Leftrightarrow$ X の最高位の数は N になる

$$\log_{10}X=20\log_{10}6$$
$$=20(\log_{10}2+\log_{10}3)$$
$$=20(0.3010+0.4771)$$
$$=20\times0.7781$$
$$=15.562$$

ここから桁数と最高位を一度に求めよう。

$\log_{10}X$ の小数部分 0.562 に近い常用対数を探すと，

$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$ だから，

$$15+\log_{10}3<\log_{10}X<15+\log_{10}4$$ ←$\log_{10}3$ と $\log_{10}4$ ではさみます。

$$\log_{10}(3\times10^{15})<\log_{10}X<\log_{10}(4\times10^{15})$$

よって，　$3\times10^{15}<X<4\times10^{15}$ ←これで，桁数，最高位ともにわかります。

この結果から，X は 16 桁であり，最高位の数は 3 であることがわかる。

(答)　ア…16，イ…3

１５　m を $0<m<1$ を満たす実数とする。
曲線 $y=x^2-x$ ，直線 $y=mx$ および直線 $x=2$ で囲まれた２つの部分の面積の和を S とする。S の最小値とそのときの m の値を求めよ。

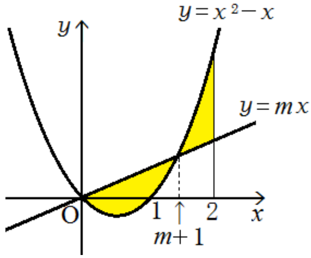
解答

曲線 $y=x^2-x$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標は,

$$x^2-x=mx$$

$$x^2-(m+1)x=0$$

$$x=0,\ m+1$$



$m+1=t$ とおく。←計算しやすいように置き換える。

$0<m<1$ より，$1<t<2$ である。

右の図より，S は,

$$S=\int_0^t (tx-x^2)\,dx+\int_t^2 (x^2-tx)\,dx$$

$$=-\int_0^t x(x-t)\,dx+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_t^2$$ ←置き換えの効果で，計算がしやすい。

$$=\frac{t^3}{6}+\left(\frac{8}{3}-2t\right)-\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^3}{2}\right)$$

$$=\frac{t^3}{3}-2t+\frac{8}{3}$$

↑ m の式には戻さない，面倒なので。

【1／6 の公式】

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

放物線と直線で囲まれた図形の面積では
この公式を使おう。

微分すると，←そのまま微分します。

$$S'=t^2-2$$

$$=(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

$1<t<2$ の範囲で S の増減表は右のようになり，S は $t=\sqrt{2}$ のとき極小かつ最小となる。

t	1	…	$\sqrt{2}$	…	2
S'		−	0	＋	
S		↘	極小	↗	

↑
増減表を正しくかこう。

最小値は,

$$S=\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}+\frac{8}{3}=\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$$

このとき，$m=t-1=\sqrt{2}-1$　←最後に m を求めます。

(答)　最小値 $\frac{8-4\sqrt{2}}{3}$，$m=\sqrt{2}-1$

１６　曲線 $y=x^3-x+2$ を C とし，原点から曲線 C に引いた接線を l とする。

(1)　直線 l の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答

(1)　$y=x^3-x+2$ より，　$y'=3x^2-1$

曲線 C 上の点$(t,\ t^3-t+2)$における接線の方程式は，

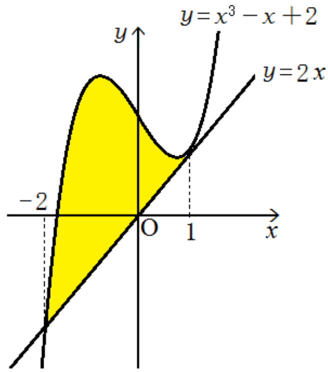
$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$　←接線 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y=(3t^2-1)x-2t^3+2$　……①

これが原点を通るとき，$-2t^3+2=0$

$t^3=1$ より，$t=1$

①に代入すると，$y=2x$　(答) $y=2x$



(2)　C：　$y=x^3-x+2$

l：　$y=2x$

C と l の共有点の x 座標を求めると，

$x^3-x+2=2x$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$　←1 を重解にもつ。

$x=1,\ -2$

右の図より，求める面積は，

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)dx$$

これを求める公式はあるが，無理に覚えなくていい。

$$=\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)\,dx=\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x-1+3)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}\left\{(x-1)^3+3(x-1)^2\right\}dx$$

【一方を 0 にする　積分計算】
$(x-1)$ を使った式で表しておくと，定積分のとき上端の計算が 0 になって計算が多少ラクになる。

$$=\left[\frac{(x-1)^4}{4}+(x-1)^3\right]_{-2}^{1}$$

$$=-\left\{\frac{(-3)^4}{4}+(-3)^3\right\}=\frac{27}{4}$$

(答) $\dfrac{27}{4}$

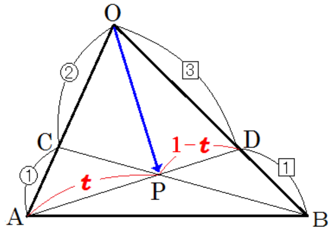
１７　△OAB において，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 1 に内分する点を D とし，線分 AD と BC の交点を P とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　OA=3，OB=2，∠AOB=60°　のとき，線分 OP の長さを求めよ。

解答

(1)　AP : PD= **t : (1−t)** とすると，



$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}$

$=(1-t)\vec{a}+\dfrac{3}{4}t\vec{b}$　…★

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ より，$\vec{a}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OC}$ だから，

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{2}(1-t)\overrightarrow{OC}+\dfrac{3}{4}t\overrightarrow{OB}$　←OC と OB で表します。

点 P は直線 CB 上の点だから，

$\dfrac{3}{2}(1-t)+\dfrac{3}{4}t=1$

【直線上にある点 P の公式】
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$
この点 P が直線 AB 上にある
⇔　**$s+t=1$**（係数の和が 1）

これを解いて，$t=\dfrac{2}{3}$

★に代入すると，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

(答)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

【別解】
BP : PC=s : (1−s)と，もう１つ比をおいて２通りに表し，s と t を求める方法。こちらが一般的だけど面倒です。なので左の解法でやろう。

(2)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60°　だから，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3\times2\times\dfrac{1}{2}=3$　←内積を求めておきます。

$|\overrightarrow{OP}|^2=\left|\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|^2=\dfrac{1}{9}|\vec{a}|^2+\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2$

$=\dfrac{1}{9}\times9+\dfrac{1}{3}\times3+\dfrac{1}{4}\times4=3$

ベクトルの大きさを求めるには，２乗しよう。そうすれば，内積が使えるようになる。

$|\overrightarrow{OP}|>0$ だから，$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3}$

(答)　$\sqrt{3}$

１８　数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和が $n(n+2)$で表される。

(1)　一般項 a_n を求めよ。また，数列$\{a_n\}$は等差数列であることを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{a_1 a_2}+\dfrac{1}{a_2 a_3}+\dfrac{1}{a_3 a_4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_9 a_{10}}$ を求めよ。

解答

(1)　数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_n=n(n+2)$

$a_1=S_1=1\cdot 3=3$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n(n+2)-(n-1)(n+1)$

$=n^2+2n-(n^2-1)$

$=2n+1$

【和が与えられた数列】

$a_1=S_1$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$

この式は $n=1$ のときも成り立つ。←この１文を必ず入れよう。

（答）　$a_n=2n+1$

また，

$a_{n+1}-a_n=\{2(n+1)+1\}-(2n+1)$ ←階差が一定値なら等差数列といえる。

$=2$

よって，数列$\{a_n\}$は公差２の等差数列である。

【等差数列の性質】

数列$\{a_n\}$が等差数列

⇔ $a_n=An+B$ と表される

⇔ $a_{n+1}-a_n$ が一定

(2)　$\dfrac{1}{a_k a_{k+1}}=\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}\right)$ ←部分分数に分けます。分母の２を忘れずに。

したがって，

$\dfrac{1}{a_1 a_2}+\dfrac{1}{a_2 a_3}+\dfrac{1}{a_3 a_4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_9 a_{10}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\cancel{\dfrac{1}{5}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{5}}-\cancel{\dfrac{1}{7}}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{7}}-\cancel{\dfrac{1}{9}}\right)+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\cancel{\dfrac{1}{19}}-\dfrac{1}{21}\right)$

隣りどうしで消し合う。

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{21}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{21}=\dfrac{1}{7}$　　（答）　$\dfrac{1}{7}$

１９　数列$\{a_n\}$が $a_1=1$，$a_n a_{n+1}=a_n-2a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている。

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_n>0$ であることを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_n，a_n をそれぞれ n の式で表せ。

解答

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_n>0$　……★

これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき，

$a_1=1>0$ だから，$n=1$ のとき★は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，★が成り立つと仮定する。

すなわち，自然数 k に対して $a_k>0$ であると仮定する。

与えられた漸化式から，$a_k a_{k+1}=a_k-2a_{k+1}$

$(a_k+2)a_{k+1}=a_k$

$a_k>0$ より，$a_{k+1}=\dfrac{a_k}{a_k+2}>0$　←a_{k+1} について解くことができ，右辺が正。

よって，$n=k+1$ のときも★が成り立つ。

[1]，[2]により，★は成り立つ。　(証明終わり)

【数学的帰納法】
[1] $n=1$ のとき成り立つ。
[2] $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(2)　$a_n a_{n+1}=a_n-2a_{n+1}$

両辺を $a_n a_{n+1}$ で割ると，$1=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}$　←こういう式変形がすぐ見えるように。

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$1=b_{n+1}-2b_n$

$$\begin{array}{rl} & b_{n+1}=2b_n+1 \\ -) & \quad \alpha=2\alpha+1 \quad \cdots★ \\ \hline & b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha) \end{array}$$

【$a_{n+1}=pa_n+q$ の漸化式】
式を，
$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$
の形に変形する。

★を解くと，$\alpha=-1$ となるから，

$\underline{b_{n+1}+1}=2\underline{(b_n+1)}$　←新しい数列$\{b_n+1\}$の漸化式ができた。

$b_1+1=1+1=2$　←新しい数列$\{b_n+1\}$の初項です。

よって，数列$\{b_n+1\}$は初項 2，公比 2 の等比数列だから，

$b_n+1=2\cdot 2^{n-1}$　　$b_n=2^n-1$

$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2^n-1}$　　(答) $b_n=2^n-1$，$a_n=1/(2^n-1)$

20　実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$3x+4y$ の最大値をいくつかの方法で求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

解答

①「$=k$」とおいて判別式の利用

$3x+4y=k$ とおく。$3x=k-4y$ …①を $9x^2+9y^2=9$ に代入すると，

$$(k-4y)^2+9y^2=9$$ ↑あらかじめ９倍しておくといい。

$$25y^2-8ky+k^2-9=0 \quad \cdots②$$

判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=16k^2-25(k^2-9)\geqq 0$

これを解くと，$-5\leqq k\leqq 5$

$k=5$ が最大値で，このときの x，y は②，①から求める。

（答）最大値 5，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

②「$=k$」とおいて点と直線の距離の利用

$3x+4y=k$ とおく。

円 $x^2+y^2=1$ と直線 $3x+4y-k=0$ が共有点をもつので，

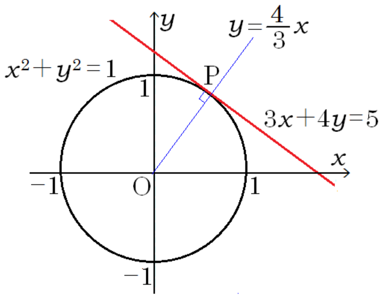
(円の中心と直線の距離)≦(円の半径)

$$\Leftrightarrow \frac{|-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}\leqq 1$$

これを解くと，$-5\leqq k\leqq 5$

$k=5$ が最大値で，このときの x，y は，

右図の 2 直線の交点 P の座標となる。



（答）最大値 5，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

③平方完成を利用

等式 $(3x+4y)^2+(4x-3y)^2=25(x^2+y^2)$ が成り立つので，

$$(3x+4y)^2=25(x^2+y^2)-(4x-3y)^2$$

$$=25-(4x-3y)^2\leqq 25$$ ←$4x-3y=0$ のとき最大。

よって，$-5\leqq 3x+4y\leqq 5$ が成り立つ。

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 4x-3y=0 \end{cases}$ を満たす x，y のうち，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$ をとれば，$3x+4y$ は最大値 5 をとる。

（答）最大値 5，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

④三角関数の利用

点$(x,\ y)$は単位円周上の点だから，

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$　←三角関数で置き換える。

とおくことができる。

原点を中心とする半径 r の円周上の点は，
$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$
と表せる。

$$3x+4y=3\cos\theta+4\sin\theta$$
$$=5\sin(\theta+\alpha)$$ ←三角関数の合成

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき，$3x+4y$ は最大値 5 をとる。

↑x，y を求める方法は，各自で考えてほしい。　（答）最大値 5，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

⑤ベクトルの内積を利用

点$(x,\ y)$を P，点$(3,\ 4)$を A とすると，

$3x+4y=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$　←内積で表せます。

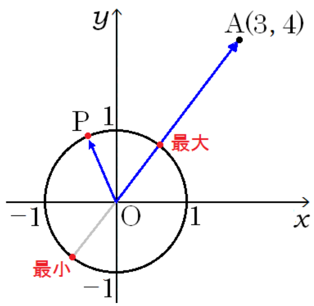
と表される。ここで，

$$-|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|\leqq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\leqq|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|$$

であり，$|\overrightarrow{OP}|=1$，$|\overrightarrow{OA}|=5$ だから，

$$-5\leqq 3x+4y\leqq 5$$

$3x+4y=5$ となるのは，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA}$ が同じ向きに平行のときであり，



$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

（答）最大値 5，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

↑①～⑥のうち，最も簡単に x，y が求められる。

⑥シュワルツの不等式を利用

シュワルツの不等式 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

これに $a=3$，$b=4$ を代入すると，←$3x+4y$ が出てくるように値を選ぶ。

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2)\geqq(3x+4y)^2$$

$x^2+y^2=1$ だから，$(3x+4y)^2\leqq 25$　……★

よって，$-5\leqq 3x+4y\leqq 5$ が成り立つ。←前ページの③と同じ形が出てきます。

★の等号が成り立つのは $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x:y=3:4\end{cases}$ のときであり，このうち，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

をとれば，$3x+4y$ は最大値 5 をとる。　（答）最大値 5，$x=\dfrac{3}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$

■計算ドリル・解答

1 (1) $2x^2+2y^2$

(2) $4xy$

(3) $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$

(4) $x^3+6x^2+11x+6$

(5) x^4-y^4

(6) $x^4+x^2y^2+y^4$

(7) x^5-1

(8) x^5+1

2 (1) $(a+4)(b+3)$

(2) $2(2x-3)(3x+5)$

(3) $(x-y)(x-y+1)$

(4) $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

(5) $(a+b)(b+c)(c+a)$

(6) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

3 (1) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

(2) $-2(x-3)^2+11$

(3) $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(a-b)^2}{4}$

(4) $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

4 (1) a^2-2b

(2) a^3-3ab

(3) $\frac{a^2-2b}{b}$

(4) a^2-4b

(5) a^3-2ab

(6) $a^5-5a^3b+5ab^2$

解説

(6) $(x^2+y^2)(x^3+y^3)$

$=x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2$

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)$

$\qquad -x^2y^2(x+y)$

$=(a^2-2b)(a^3-3ab)-ab^2$

$=a^5-5a^3b+5ab^2$

5 (1) $x=\frac{-5\pm\sqrt{47}i}{6}$

(2) $x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i$

(3) $x=\pm3,\ \pm2i$

(4) $x=-1,\ 1\pm2i$

(5) $(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (3,\ 9)$

(6) $(x,\ y)=(1,\ 2),\ (-2,\ -1)$

(7) $(x,\ y)=(1+i,\ 1-i),$
$(x,\ y)=(1-i,\ 1+i)$

(8) $a=2,\ b=1,\ c=3$

解説

(7) 和が 2，積が 2 だから，
x，y は，$t^2-2t+2=0$ の解である。これを解いて，
$t=1\pm i$

(8) $a+b=3$ …①
$b+c=4$ …②
$c+a=5$ …③
(①+②+③)÷2 より，
$a+b+c=6$ …④
④−①，④−②，④−③をすれば
c，a，b の順に求められる。

MEMO