

【厳選20題】

入試数学演習 I A II B



解けないときの数学思考法

- ①問題文を、もう一度よく読む
- ②具体例を調べて、手掛かりをつかむ
- ③解けない原因は何か、これを探る
- ④知っている方法を、こじつけてみる

目次

	1	式の値	数Ⅰ	数と式
	2	命題の真偽	数Ⅰ	数と式
	3	2次関数の最大・最小	数Ⅰ	2次関数
	4	2次方程式の解	数Ⅰ	2次関数
	5	正弦定理・余弦定理	数Ⅰ	図形と計量
	6	順列・組合せ	数A	場合の数と確率
	7	確率	数A	場合の数と確率
	8	合同式, 不定方程式	数A	整数の性質
	9	等式・不等式の証明	数Ⅱ	式と証明
	10	相加平均・相乗平均	数Ⅱ	式と証明
	11	いろいろな方程式	数Ⅱ	複素数と方程式
	12	領域と最大・最小	数Ⅱ	図形と方程式
	13	三角関数の最大・最小	数Ⅱ	三角関数
	14	指数・対数の応用	数Ⅱ	指数・対数関数
	15	微積分の融合問題(1)	数Ⅱ	微分法・積分法
	16	微積分の融合問題(2)	数Ⅱ	微分法・積分法
	17	ベクトルの応用	数B	ベクトル
	18	いろいろな数列	数B	数列
	19	漸化式と数学的帰納法	数B	数列
	20	2変数の最大・最小	数ⅡⅡB	いろいろです
	■	計算ドリル	数ⅡⅡ	いろいろです

問題

- 1 (1) $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ のとき, x^4y+xy^4 の値を求めよ。
- (2) $x+\frac{1}{x}=3$ のとき, $x^4+\frac{1}{x^4}$ の値を求めよ。
- (3) $x+y+z=3$, $xy+yz+zx=4$, $xyz=2$ のとき, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ の値を求めよ。

2 次の に, 必要, 十分, 必要十分のうち適するものを入れよ。

- (1) $x^2 < 3x$ であることは, $|x-1| < 3$ であるための 条件である。
- (2) 整数 a, b において, ab が偶数であることは, a^2+b^2 が奇数であるための 条件である。

3 a を定数として, $0 \leq x \leq 4$ における関数 $y = x^2 - ax + 3a$ の最小値を M とする。

- (1) M を a の式で表せ。
- (2) $M=5$ となるときの a の値を求めよ。

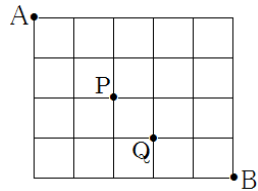
4 2次方程式 $x^2 - ax + 2a = 0$ が異なる2つの実数解をもち, それらがともに3より大きくなるように, 定数 a の値の範囲を定めよ。

5 $\triangle ABC$ において、 $AB=8$ 、 $BC=7$ 、 $CA=9$ とする。

このとき、 $\sin A=[ア]$ である。また、外接円の半径は[イ]であり、
内接円の半径は[ウ]である。

6 (1) $x+y+z=10$ を満たす正の整数 x 、 y 、 z の組 (x, y, z) は、全部で何組あるか。

(2) 図のような道がある。AからBまで最短の道を行くとき、途中でPを通る道順は[ア]通りあり、PまたはQを通る道順は[イ]通りある。



7 (1) 1から8までの整数が1つずつ書かれた8枚のカードの中から3枚をひいて1列に並べ、3桁の整数をつくる。
この整数が3の倍数である確率を求めよ。

(2) 店に立ち寄るたびに20%の確率で傘を忘れる人が、A、B、C3つの店に順に立ち寄ったあと、どこかの店に傘を忘れたことに気付いた。
2番目のBで傘を忘れた確率を求めよ。

8 (1) 2^{100} を17で割ったときの余りを求めよ。

(2) $29x+13y=1$ の整数解を求めよ。

9 (1) $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ のとき, $x^2 + y^2 + z^2 = yz + 2zx$ を証明せよ。

(2) $(x+2y)^2 \geq 2(x-2)(y+1)$ を証明せよ。

10 (1) $a > 0, b > 0, c > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

(2) $x > 0$ のとき, $\frac{x}{x^2+1}$ の最大値を求めよ。

11 (1) 2次方程式 $x^2 - 2x + 5 = 0$ の2つの解を α, β とするとき, 次の値を求めよ。

① $(2\alpha - 1)(2\beta - 1)$

② $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 8\alpha + 2$

(2) 方程式 $x^3 = 1$ の虚数解の1つを ω とするとき, $\omega^{10} + \omega^{20}$ の値を求めよ。

12 x, y が2つの不等式 $y \leq -\frac{1}{2}x + 10, y \geq |2x - 10|$ を満たす。

(1) $x + y$ の最大値を求めよ。

(2) $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

13 $y = 2 \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$)とする。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とおく。 y を t の関数で表せ。
- (2) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) y の最大値と最小値を求めよ。

14 (1) 正の実数 x, y が $x^2 y = 16$ を満たすとき、 $(\log_2 x)(\log_2 y)$ の最大値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。

- (2) 6^{20} は [ア] 桁の整数である。また、その最高位の数は [イ] である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

15 m を $0 < m < 1$ を満たす実数とする。

曲線 $y = x^2 - x$, 直線 $y = mx$ および直線 $x = 2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。 S の最小値とそのときの m の値を求めよ。

16 曲線 $y = x^3 - x + 2$ を C とし、原点から曲線 C に引いた接線を l とする。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

17 $\triangle OAB$ において、辺 OA を $2:1$ に内分する点を C 、辺 OB を $3:1$ に内分する点を D とし、線分 AD と BC の交点を P とする。

(1) $\overline{OA} = \vec{a}$ 、 $\overline{OB} = \vec{b}$ として、 \overline{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。

(2) $OA=3$ 、 $OB=2$ 、 $\angle AOB=60^\circ$ のとき、線分 OP の長さを求めよ。

18 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $n(n+2)$ で表される。

(1) 一般項 a_n を求めよ。また、数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ。

(2) $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_9 a_{10}}$ を求めよ。

19 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$ 、 $a_n a_{n+1} = a_n - 2a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たしている。

(1) すべての自然数 n に対して、 $a_n > 0$ であることを示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、 b_n 、 a_n をそれぞれ n の式で表せ。

20 実数 x 、 y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき、 $3x + 4y$ の最大値をいくつかの方法で求めよ。また、そのときの x 、 y の値を求めよ。

■計算ドリル ～空いた時間にサクッとやろう～

1 展開した形で表せ。

(1) $(x+y)^2 + (x-y)^2$

(2) $(x+y)^2 - (x-y)^2$

(3) $(x+y)^3(x-y)^3$

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)$

(5) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

(6) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(7) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

(8) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

2 因数分解をせよ。

(1) $ab+3a+4b+12$

(2) $12x^2+2x-30$

(3) $x^2+y^2-2xy+x-y$

(4) x^4-13x^2+36

(5) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

(6) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

3 平方完成せよ。

(1) x^2+x+1

(2) $-2x^2+12x-7$

(3) $(x-a)(x-b)$

(4) ax^2+bx+c

4 $x+y=a$, $xy=b$ として、次の式を a , b だけの式で表せ。

(1) x^2+y^2

(2) x^3+y^3

(3) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

(4) $(x-y)^2$

(5) $x^3+x^2y+xy^2+y^3$

(6) x^5+y^5

5 方程式を解け。

(1) $3x^2+5x+6=0$

(2) $x^3-8=0$

(3) $x^4-5x^2-36=0$

(4) $x^3-x^2+3x+5=0$

(5) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ y = x+1 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} a+b = 3 \\ b+c = 4 \\ c+a = 5 \end{cases}$